7. Аддитивные и мультипликативные суждения диалектической логики. Аддитивные и мультипликативные дифференциалы и интегралы диалектических суждений

7.1. Мотаторы и поля суждений

Оппозиты, описывающие объекты природы, и оппозиты, выражающие многообразие отношений между ними, представляют множество диалектических размышлений: описаний, высказываний, суждений, рассуждений. Если размышления заменить конкретными квантитативно-квалитативными числами и символами-отношениями, размышления трансформируются в квантитативно-квалитативное диалектическое множество мер-чисел. В этом смысле размышления и числа - две грани единого языка диалектики.

Объекты природы, как источники размышлений, называем мотаторами (< лат.motator действующий), а их поля - полями суждений отношений и обмена. Логические образы полей описываются полями оппозит. Мотаторы и поля тесно переплетены в единый противоречивый комплекс мотатор - поле отношений и обмена. Мотаторы в определенной степени генераторы и трансформаторы полей отношений и обмена. Они порождают эти поля, и сами изменяются под их воздействием. Простейшее потенциально-кинетическое поле суждения имеет вид

$$\hat{S}(t) = r(t)\hat{1}, \quad \text{где} \quad \hat{1} = e^{i\omega t} \quad \text{и} \quad r(t) \text{ - модуль суждения.} \tag{1.145}$$

Число e - базис гармонической единицы - заслуживает особого внимания. Для понимания его глубокого смысла расширим понятия дифференциала и производной.

7.2. Аддитивная и мультипликативная непрерывность

Современная наука явно оперирует аддитивной непрерывностью. Аддитивная непрерывность выражается в физике непрерывно изменяющимися суммами. Например, в равномерном движении путь есть аддитивная непрерывность: $s = vt$

Непрерывно изменяющиеся суммы описываются классическими дифференциалами, производными и интегралами, которые будем называть аддитивными дифференциалами, производными и интегралами.

В то же время, многие процессы описываются непрерывно изменяющимися произведениями, которые выражаются с помощью бесконечных произведений сомножителей непрерывного ряда. Такие суждения-произведения выражают мультипликативную непрерывность. Простейший пример мультипликативной непрерывности - показательные функции a^x, e^x, диалектические суждения типа (1.93) и т.д.

Классическая математика описывает мультипликативную непрерывность с помощью аддитивных дифференциалов, производных и интегралов, но этого недостаточно для глубокого и всестороннего описания мультипликативной непрерывности и ее физического понимания. В общем случае аддитивная и мультипликативная непрерывности полярно противоположные явления, но математически их молчаливо отождествляют. Так часто поступают с движением и покоем, хотя движение и покой не равны друг другу. На уровне формальной логики движение обычно рассматривается как бесконечная сумма состояний покоя, хотя это не так. Более корректно движение описывать через движение, а покой через покой. Точно так же более точное описание мультипликативной непрерывности следует осуществлять с помощью мультипликативных дифференциалов, производных и интегралов.

В реальном Мире аддитивная и мультипликативной непрерывности соединены вместе в единый диалектический комплекс - аддитивно-мультипликативную непрерывность, которая должна описываться не только аддитивными, но и мультипликативными дифференциалами, производными и интегралами.

Разумеется, аддитивно-мультипликативная непрерывность неотделима от аддитивно-мультипликативной прерывности, т.е. от аддитивно-мультипликативных резких импульсных переходов.

7.3. Мультипликативный дифференциал и производная. Смысл числа e

Мультипликативное отношение или рацио rS между разными состояниями переменной оппозиты $S(t)$ в точках t и $t+\Delta t$ выражает мультипликативный дифференциал суждения в точке t

$$rS = rS(t) = S(t+\Delta t)/S(t)\,. \tag{1.146}$$

Мультипликативная производная $^{\bullet}S$ в точке t определяется как предел мультипликативного отношения рацио rS к приращению аргумента Δt:

$$^{\bullet}S = \lim_{\Delta t\to 0}(S(t+\Delta t)\,/\,S(t))^{1/\Delta t}\,, \tag{1.147}$$

где $1/\Delta t$ - степень рацио rS.

Так как $S(t+\Delta t)\,/\,S(t) = 1+\dfrac{S'(t)\Delta t}{S(t)}$, то

$$^{\bullet}S = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\left(1+\frac{S'(t)\Delta t}{S(t)}\right)^{S(t)/S'(t)\Delta t}\right]^{S'(t)/S(t)}. \tag{1.148}$$

Выражение в квадратных скобках имеет пределом число e, поэтому

$$^{\bullet}S = e^{S'(t)/S(t)}. \tag{1.149}$$

Символически мультипликативную производную записываем в виде

$$^{\bullet}S = rS^{1/dt}\,. \tag{1.149a}$$

Аддитивная и мультипликативная производные связаны между собой простым равенством

$$S'(t) = S(t)\cdot\ln(^{\bullet}S(t))\,, \tag{1.150}$$

Возвращаясь к пределу (1.72) заключаем, число e есть мультипликативная производная переменной единицы, описывающая мультипликативную непрерывность:

$$^{\bullet}1_v = \lim_{\Delta 1\to 0}\left(\frac{1+\Delta 1}{1}\right)^{1/\Delta 1} = e\,.$$

Опираясь на формулу (1.149), находим мультипликативную производную переменной единицы отрицания $i_v = 1_v i$. Так как $(i_v)' = 1_v$, то

$$^{\bullet}i_v = e^{-i}. \qquad (1.151)$$

Очевидно, мультипликативная производная гармонического суждения единичной амплитуды по аргументу φ (см.(1.99)) будет равна

$$^{\bullet}\hat{1} = e^{i}. \qquad (1.151a)$$

Таким образом, она обратна мультипликативной производной переменной единицы отрицания

$$^{\bullet}\hat{1} = e^{i} = (^{\bullet}i_v)^{-1}. \qquad (1.151b)$$

Мультипликативная производная квантитативно-квалитативной гармонической единицы суждения по аргументу t (см.(1.98)) имеет вид

$$^{\bullet}\hat{1} = e^{i\omega}. \qquad (1.151c)$$

На основании (1.147) выражаем мультипликативный дифференциал через мультипликативную производную

$$rS = S(t+\Delta t)\,/\,S(t) = {}^{\bullet}S(t)^{\Delta t}, \qquad (1.152)$$

где $^{\bullet}S(t)^{\Delta t} = \left(^{\bullet}S(t)\right)^{\Delta t}$ - степень мультипликативной производной с показателем Δt. Таким образом,

$$S(t+\Delta t) = S(t) \cdot {}^{\bullet}S(t)^{\Delta t}. \qquad (1.152a)$$

Соотношения (1.152) и (1.152a) аналогичны соответствующим аддитивным отношениям:

$$\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t) = S'(t)\Delta t, \qquad (1.153)$$

$$S(t+\Delta t) = S(t) + S'(t)\Delta t. \qquad (1.153a)$$

Приведем для сравнения аддитивные и мультипликативные производные некоторых элементарных функций:

$$\begin{array}{ll}
\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1} & ^{\bullet}\left(x^{\alpha}\right) = e^{\frac{\alpha}{x}} \\
\left(\sin x\right)' = \cos x & ^{\bullet}\left(\sin x\right) = e^{\operatorname{ctg} x} \\
\left(\cos x\right)' = -\sin x & ^{\bullet}\left(\cos x\right) = e^{-\operatorname{tg} x} \\
\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} & ^{\bullet}\left(\operatorname{tg} x\right) = e^{\frac{1}{\cos x \sin x}} \\
\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} & ^{\bullet}\left(\operatorname{ctg} x\right) = e^{-\frac{1}{\cos x \sin x}} \\
\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & ^{\bullet}\left(\arcsin x\right) = e^{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}} \\
\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & ^{\bullet}\left(\arccos x\right) = e^{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}}
\end{array} \qquad (1.154)$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a \qquad {}^{\bullet}\!\left(a^x\right) = a$$

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad {}^{\bullet}\!\left(\log_a x\right) = e^{\frac{1}{x \ln x}}$$

$$\left(x^x\right)' = x^x (\ln x + 1) \qquad {}^{\bullet}\!\left(x^x\right) = x\,e\,.$$

Как известно, аддитивная производная есть скорость изменения функции; эту скорость будем называть аддитивной скоростью. В таком случае мультипликативная производная есть мультипликативная скорость изменения мультипликативных процессов.

Пусть, например, гармоническое суждение

$$\hat{\psi} = \psi_0 e^{i\omega t} \tag{1.155}$$

описывает некоторый элементарный процесс. Его аддитивная и мультипликативная скорости соответственно равны

$$\hat{V} = i\omega\psi_0 e^{i\omega t}, \quad \hat{\upsilon} = e^{i\omega}. \tag{1.156}$$

Отсюда находим взаимосвязь данных скоростей

$$\hat{V} = i\omega\psi_0 \hat{\upsilon}^t, \tag{1.157}$$

и суждение теперь можно записать так

$$\hat{\psi} = \psi_0 \hat{\upsilon}^t. \tag{1.158}$$

Это выражение есть аналог некоторого равномерного аддитивного процесса:

$$\psi = \psi_0 + \upsilon t, \tag{1.158a}$$

где υ - постоянная аддитивная скорость. Поэтому имеет смысл выражение (1.158) называть равномерным мультипликативным процессом, а его мультипликативную скорость - равномерной мультипликативной скоростью. Таким образом, элементарные гармонические колебания любой природы есть равномерные мультипликативные процессы.

Аддитивная скорость гармонического суждения (1.155), будучи аддитивно переменной, мультипликативно равномерна согласно равенству (1.157). Следовательно, гармонический импульс материальной точки массой m также мультипликативно равномерен:

$$\hat{P} = m\hat{V} = im\omega\psi_0 \hat{\upsilon}^t = iP_m \hat{\upsilon}^t, \tag{1.159}$$

где P_m - амплитуда импульса.

Аддитивное ускорение в равномерном аддитивном процессе равно нулю, а в равномерном мультипликативном процессе мультипликативное ускорение, как следует из формул (1.149) и (1.156), равно единице. И это понятно: ноль не изменяет постоянный аддитивный процесс, а единица не изменяет постоянный мультипликативный процесс.

Мультипликативная скорость единичного суждения (1.98) равняется мультипликативной скорости гармонического суждения (1.155)

$$^{\bullet}\hat{1} = \hat{\upsilon} = e^{i\omega}, \tag{1.160}$$

поэтому выражения (1.158) и (1.159) можно представить еще в виде

$$\hat{\psi} = \psi_0 {}^{\bullet}\hat{1}^t, \qquad \hat{P} = iP_m {}^{\bullet}\hat{1}^t. \tag{1.161}$$

7.4. Мультипликативный интеграл

Подобно аддитивному определенному интегралу

$$S(t) = s_0 + \lim_{\Delta t \to 0} \sum s'(t)\Delta t = s_0 + \int_{t_0}^{t} s'(t)dt \tag{1.162}$$

определяется мультипликативный определенный интеграл, равный пределу произведений мультипликативных рацио

$$S(t) = s_0 \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \prod {}^{\bullet}s(t)^{\Delta t} = s_0 \bigcap_{t_0}^{t} {}^{\bullet}s(t)^{dt} \tag{1.162a}$$

Неопределенному аддитивному интегралу с аддитивной постоянной C:

$$\int s'(t)dt = s(t) + C \tag{1.163}$$

соответствует неопределенный мультипликативный интеграл с мультипликативной постоянной C:

$$\bigcap_{t_0}^{t} {}^{\bullet}s(t)^{dt} = CS(t). \tag{1.163a}$$

На основании (1.149) находим связь между мультипликативным и аддитивным интегралами:

$$\bigcap_{t_0}^{t} {}^{\bullet}s(t)^{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \prod_{t_0}^{t} {}^{\bullet}s(t)^{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \prod_{t_0}^{t} \left(e^{\frac{s'(t)}{s(t)}} \right)^{\Delta t} = e^{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \sum\limits_{t_0}^{t} \frac{s'(t)}{s(t)} dt} = e^{\int_{t_0}^{t} \frac{s'(t)}{s(t)} dt} = e^{\int_{t_0}^{t} \ln({}^{\bullet}s(t))dt}$$

Итак,

$$\bigcap_{t_0}^{t} {}^{\bullet}s(t)^{dt} = e^{\int_{t_0}^{t} \frac{s'(t)}{s(t)} dt} = e^{\int_{t_0}^{t} \ln({}^{\bullet}s(t))dt}. \tag{1.164}$$

Для неопределенных интегралов будем имеем

$$\bigcap {}^{\bullet}s(t)^{dt} = e^{\int \frac{s'(t)}{s(t)} dt} = e^{\int \ln({}^{\bullet}s(t))dt}. \tag{1.164a}$$

Опираясь на (1.151а) и (1.162а) заключаем, гармоническая единица с точностью до постоянного множителя есть мультипликативный интеграл:

$$\hat{\imath} = \bigcap (^{\bullet}\hat{\imath})^{id\varphi} = e^{i\varphi} \; . \qquad (1.165)$$

7.5. Аддитивные и мультипликативные интегралы

Аддитивные и мультипликативные производные и дифференциалы позволяют полнее описывать сложные суждения в форме суперпозиций элементарных суждений, как в виде сумм, так и произведений разной степени прерывности:

а) аддитивная | б) мультипликативная

1. прерывная суперпозиция

$$S(z) = s_0 + \sum_{n=1}^{N} s_n(z) \qquad\qquad S(z) = s_0 \cdot \prod_{n=1}^{N} s_n(z)$$

2. дискретная суперпозиция

$$S(z) = s_0 + \sum_{n=1}^{N} \Delta s_n(z) dz \qquad\qquad S(z) = s_0 \cdot \prod_{n=1}^{N} r s_n(z)$$

3. кретная суперпозиция

$$S(z) = s_0 + \sum_{z_0}^{z} s'(z) dz \qquad\qquad S(z) = s_0 \cdot \prod_{z_0}^{z} {}^{\bullet}s(z)^{\Delta z}$$

4. непрерывная суперпозиция

$$S(z) = s_0 + \int_{z_0}^{z} s'(z) dz \qquad\qquad S(z) = s_0 \cdot \bigcap_{z_0}^{z} {}^{\bullet}s(z)^{dz}$$

Мультипликативные интегралы рассчитываются на основании аддитивных интегралов и могут быть проще и сложнее последних, например:

$$\begin{array}{ll}
\int a dx = ax + C & \bigcap a^{dx} = Ca^{x} \\
\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C & \bigcap x^{\alpha dx} = Ce^{\int \ln x^{\alpha} dx} = Ce^{\alpha(x \ln x - x)} \\
\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C & \bigcap a^{x dx} = Ce^{\int \ln a^{x} dx} = Ca^{\frac{x^2}{2}} \\
\int \sin x \, dx = -\cos x + C & \bigcap \sin^{dx} x = Ce^{\int \ln \sin x \, dx} = Ce^{L(\pi/2 - x)} \\
\int \cos x \, dx = \sin x + C & \bigcap \cos^{dx} x = Ce^{-L(x)} \\
\int \mathrm{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C & \bigcap \mathrm{tg}^{dx} x = Ce^{L(x) + L(\pi/2 - x)} ,
\end{array} \qquad (1.166)$$

где $L(x) = -\int_{0}^{x} \ln \cos t \, dt$ - функция Лобачевского.