6. Непрерывные и прерывные дифференциалы и производные суждений диалектической логики

6.1. Материальная и идеальная точки

Корректное описание объективно-субъективных процессов опирается на понятие материальных и идеальных точек.

Идеальной точкой x_i называем предел последовательности вложенных объемов материальных точек, когда их наибольший поперечник стремится к нулю. Положение идеальной точки определяется ее математическими координатами; в частности, если точка лежит на оси, ее координату и самую точку обычно будем обозначать одним и тем же символом типа x_c.

Материальная точка x_m - любой объект весьма малого объема, размеры которого необходимо принимать во внимание.

Положение материальной точки и ее размеры выражаем с помощью ее произвольной идеальной точки; в частности, если материальная точка лежит на оси, ее положение и размеры будем представлять в виде интервала $(x_c - \Delta_1, x_c + \Delta_2)$, где x_c - некоторая идеальная точка материальной точки x_m. Таким образом, в случае линейной материальной точки имеем

$$x_m = (x_c - \Delta_1, x_c + \Delta_2). \tag{1.106}$$

В тексте, ради краткости, материальную точку также будем обозначать символом ее идеальной точки x_c.

6.2. Аддитивные дифференциалы

Взаимные аддитивные параметры точек и соотношения в пределах материальных точек выражаем аддитивными дифференциалами. Различаем четыре основных типа дифференциалов:

$$dS = \begin{cases} MS \\ \Delta S \\ \mu S \\ dS \end{cases}. \tag{1.107}$$

Первый прерывный, интегральный дифференциал MS описывает конечные вариации, второй дискретный ΔS - небольшие вариации, третий кретный μS - малые вариации, четвертый непрерывный dS - переменные вариации, принимающие любые сколь угодно малые значения, включая и ноль в соответствующей точке суждения. Конечно, такое деление дифференциалов на типы носит относительный характер.

Аддитивные вариации (дифференциалы) дополняем обратными аддитивными вариациями-дифференциалами в произвольной точке t:

$$\delta S = \delta S(t) = \begin{cases} IMS = \dfrac{1}{MS} \\ I\Delta S = \dfrac{1}{\Delta S} \\ I\mu S = \dfrac{1}{\mu S} \\ \delta S = \dfrac{1}{dS} \end{cases}. \tag{1.108}$$

и в определенной точке t_k:

$$\delta S = \delta S(t - t_k), \tag{1.109}$$

где t_k - некоторая характерная идеальная точка материальной точки $t_m = (t_k - \Delta_1, t_k + \Delta_2)$.

6.3. Аддитивные производные

Обобщенная аддитивная производная определяется выражением

$$S' = \frac{dS}{dt} = dS \cdot \delta t(t), \tag{1.110}$$

где dS и dt дифференциалы любых типов, и $\delta t(t)$ обратный дифференциал. Если дифференциалы непрерывны, предел отношения

$$S' = \frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} \tag{1.111}$$

определяет непрерывную производную. Дифференциалы одного типа образуют средние производные, дифференциалы не одного типа определяют производные различной степени дискретности:

$$S' = \frac{MS}{\Delta t}, \quad \frac{MS}{\mu t}, \quad \frac{\Delta S}{\mu t}, \quad \frac{MS}{dt}, \quad \frac{\Delta S}{dt}, \quad \frac{\mu S}{dt}, \tag{1.112}$$

где dt - некоторое малое приращение аргумента t. Такие производные называем прерывными, дискретными, кретными и т.п.

Материальные и идеальные точки, в которых суждение имеет непрерывную производную, есть точки непрерывного изменения или непрерывного перехода. Материальные точки с прерывными производными определяют точки прерывного изменения или перехода. Прерывные производные выражаем в следующей форме:

$$S' = \frac{\Delta S(t)}{dt} = \Delta S \cdot \delta(t - t_k), \tag{1.113}$$

где dt - изменение переменной t в пределах материальной точки прерывного перехода суждения и $\delta(t - t_k)$ - обратный дифференциал. Когда материальная точка стягивается в идеальную, получаем идеальную прерывную производную.

6.4. Характер изменения суждений

Производные, как оппозиты-суждения, позволяют высказывать суждения относительно характера изменения суждения, которое наглядно представляется графиками оппозиты и ее производной.

Нас будут интересовать, прежде всего, точки, в которых суждения претерпевают изломы и скачки, выражающие прерывно-непрерывные переходы в природе. Пусть суждение-оппозита в материальной точке x_m претерпевает прерывный переход на качественной стороне и непрерывный на количественной стороне. Графически это выражается изломом (рис.1-10).

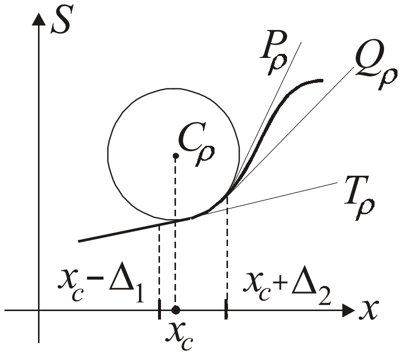

Рис.1-10. Оппозита и ее производная в области излома.

Суждение с изломом представляем логической конструкцией:

$$S(x) = \eta(x - x_c) \cdot f(x) + e(x - x_c) \cdot g(x), \tag{1.114}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ - оппозиты, определяющие поведение суждения $S(x)$ до и после перехода; $\eta(x-x_c)$ и $e(x-x_c)$ - ступенчатые единичные суждения:

$$\eta(x-x_c) = \begin{cases} 1 & x < x_c \\ h(x) & x \in x_c \\ 0 & x > x_c \end{cases} \qquad e(x-x_c) = \begin{cases} 0 & x < x_c \\ \varphi(x) & x \in x_c \\ 1 & x > x_c \end{cases}, \tag{1.115}$$

где $\varphi(x)$ и $h(x)$ функции в точке.

Ступенчатые суждения описывают резкие переходы соответственно от 0 до 1 и от 1 до 0 в пределах материальной точки.

Такие переходы в зависимости от степени их крутизны называем прерывными, дискретными, кретными. Это реальные противоречивые переходы, дискретность которых реализуется через непрерывность. Если материальная точка трансформируется в идеальную точку, ступенчатые суждения переходят в идеальные ступенчатые суждения. Поведение функции (1.114) представляем упрощенной моделью

$$S(x-x_c) = \begin{cases} f(x) & \text{for } x < x_c - \Delta_1 \\ S\varphi & \text{for } x_c - \Delta_1 < x_c < x_c + \Delta_2 \\ g(x) & \text{for } x > x_c + \Delta_2 \end{cases}, \tag{1.116}$$

где x_c - некоторая предельная точка материальной точки перехода размером $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$ и $S\varphi$ - значения принимаемые суждением в пределах точки перехода, которые лежат на дуге круга C_ρ радиуса ρ, символизирующего материальную точку графика суждения (рис.1-10).

Полагаем значения суждения слева и справа от точки излома равными значению суждения в самой точке излома, с точностью до вариаций суждения в пределах этой точки:

$$f(x_c-) = S(x_c) = g(x_c+)\,, \tag{1.117}$$

причем значения производных слева и справа от точки x_m не равны:

$$S'(x_c-) \neq S'(x_c+)\,. \tag{1.118}$$

При малом радиусе ρ суждение S имеет в материальной точке x_m

а) левую производную, определяющую наклон касательной T_ρ:

$$S'(x_c-) = \lim_{\Delta x\to 0,\ \rho\neq 0} \frac{f(x_c-\Delta_1) - f(x_c-\Delta_1-\Delta x)}{\Delta x} = \eta(x-x_c)f'(x)\,; \tag{1.119}$$

б) правую производную, определяющую наклон касательной P_ρ:

$$S'(x_c+) = \lim_{\Delta x\to 0,\ \rho\neq 0} \frac{f(x_c+\Delta_2+\Delta x) - f(x_c+\Delta_2)}{\Delta x} = e(x-x_c)g'(x)\,; \tag{1.120}$$

в) множество промежуточных производных, значения которых непрерывно заполняют интервал V_ρ и определяют множество наклонов промежуточных касательных Q_ρ:

$$S'(x_c) \in V_\rho = \left(S'(x_c-), S'(x_c+)\right). \tag{1.121}$$

В материальной точке излома производную можно представить функциональной конструкцией:

$$S'_\rho(x_c) = S'(x_c-) + \Delta S'(x_c)e(x-x_c)\,, \qquad x \in (x_c-\Delta_1, x_c+\Delta_2)\,, \tag{1.122}$$

где $\Delta S'(x_c) = \Delta S'(x_c+) - \Delta S'(x_c-)$ - скачек производной. Во всем интервале изменения суждения имеем:

$$S'(x_c) = \eta(x-x_c)f'(x) + \Delta S'(x_c)e(x-x_c) + e(x-x_c)g'(x) \tag{1.123}$$

где первое и третье слагаемое определяют изменение производной до и после скачка.

Если положить:

$$S'_c(x) = \eta(x-x_c)f'(x) + e(x-x_c)g'(x)\,, \tag{1.124}$$

тогда

$$S'(x) = S'_c(x) + \Delta S'(x_c)e(x-x_c)\,. \tag{1.125}$$

Здесь первое слагаемое - непрерывная составляющая производной вне материальной точки $(x_c-\Delta_1, x_c+\Delta_2)$. Второе слагаемое определяет дискретную составляющую производной в пределах материальной точки.

Таким образом, производная, определяемая формулой (1.125), есть непрерывно-прерывная производная.

Если производная $S'(x)$ не имеет в материальной точке излома, т.е. ее производные слева и справа равны: $S''(x_c-) = S''(x_c+)$, тогда вторая производная в материальной точке принимает вид

$$S''(x) = \Delta S'(x_c)e'(x - x_c)\,. \tag{1.126}$$

6.5. Обобщенный обратный дифференциал

Так как средняя производная ступенчатого единичного суждения в материальной точке x_m равна обратному дифференциалу:

$$\langle e(x - x_c)\rangle = \frac{1-0}{\Delta} = \delta(x_c), \quad \text{где } \Delta = \Delta_1 + \Delta_2 \quad \text{(см. рис.1.10)}, \tag{1.127}$$

то имеет смысл ввести обобщенный обратный дифференциал, определяя его как обратный дифференциал-функцию $\delta(x - x_c)$, равный производной ступенчатого единичного суждения в материальной точке x_m:

$$\delta\,(x - x_c) = e'(x - x_c)\,. \tag{1.128}$$

Таким образом, можно говорить о двух обратных дифференциалах: дифференциале - средней производной и дифференциале - мгновенной производной в материальной точке x_m. В дальнейшем, ради простоты, обратные дифференциалы обоих типов называем просто обратными дифференциалами. Когда материальная точка x_m стягивается в идеальную точку x_c, обратный дифференциал-функция обращается в идеальный предельный обратный дифференциал, равный δ-функции.

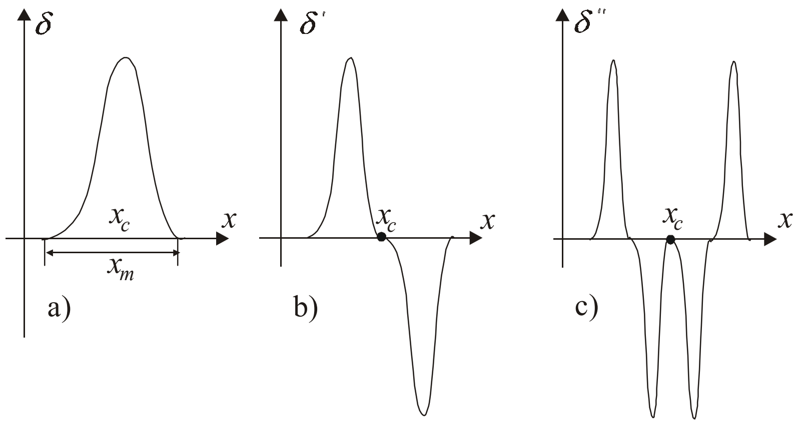

Рис.1-11. Обратный дифференциал и его первые две производные

Оперируя обратным дифференциалом, представим вторую производную суждения в материальной точке в виде:

$$S''(x) = \Delta S'(x_c)\delta\,(x - x_c)\,. \tag{1.129}$$

График обратного дифференциала-функции, имеющий вид весьма сжатого импульса, полностью определяет изменение n-ой производной в точке x_m, если отсутствуют изломы производных:

$$S^{(n)}(x) = \Delta S'(x_c)\delta^{(n-2)}(x - x_c). \qquad (1.130)$$

На рис.1-11 представлены графики обратного дифференциала-функции и его двух первых производных, которые с точностью до постоянного множителя $\Delta S'(x_c)$ показывают характер изменения производных в точках чистого излома, описываемого на основе предложенной упрощенной модели излома.

6.6. Полная производная суждения

При $\rho \to 0$ семейство оппозит S со своими производными переходит в оппозиту с идеальным абсолютно острым изломом (рис.1-12).

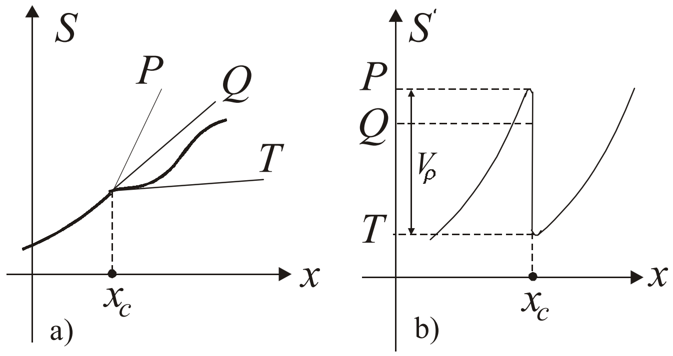

Рис.1-12. Функция и ее производная в области идеального излома.

В точке идеального математического излома оппозита имеет:
а) левую производную, определяющую наклон касательной P:

$$S'(x_c-) = \lim_{\Delta x \to 0,\ \rho \to 0} \frac{f(x_c - \Delta_1) - f(x_c - \Delta_1 - \Delta x)}{\Delta x} = \eta(x - x_c)f'(x); \qquad (1.131)$$

б) правую производную, определяющую наклон касательной T:

$$S'(x_c+) = \lim_{\Delta x \to 0,\ \rho \to 0} \frac{f(x_c + \Delta_2 + \Delta x) - f(x_c + \Delta_2)}{\Delta x} = e(x - x_c)g'(x); \qquad (1.132)$$

в) множество промежуточных производных, значения которых непрерывно заполняют интервал V_ρ, и определяют множество наклонов промежуточных касательных Q:

$$S'(x_c) \in V = (S'(x_c-), S'(x_c)). \qquad (1.133)$$

Если в материальной точке выполняются условия:

$$S(x_c-) \neq S(x_c+) \text{ и } \quad S'(x_c-) = S'(x_c+)\,, \qquad (1.134)$$

суждение претерпевает дискретный переход с дискретной производной в точке перехода:

$$S'(x_c) = \Delta S\delta\,(x - x_c) \quad \text{где} \quad \Delta S = S(x_c+) - S(x_c-)\,. \qquad (1.135)$$

Такой переход называем скачком в материальной точке (рис.1-13). В нем имеет место неформальная количественная прерывность и качественная непрерывность.

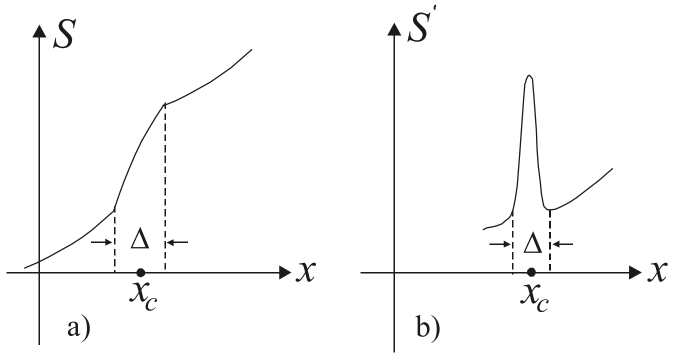

Рис.1-13. Функция и ее производная в области скачка.

Полная производная суждения со скачком имеет вид:

$$S'(x) = S_c'(x) + \Delta S\delta\,(x - x_c)\,, \qquad (1.136)$$

где $S_c'(x)$ - непрерывная и $\Delta S'\delta\,(x - x_c)$ - прерывная составляющие полной производной. Соответственно n-я производная скачка имеет вид:

$$S^{(n)}(x) = S_c^{(n)}(x) + \Delta S\delta^{\,(n-1)}(x - x_c)\,. \qquad (1.137)$$

Сложный дискретный переход - скачок с изломом (рис.1-14) - характеризуется условием:

$$S(x_c-) \neq S(x_c+) \text{ и } \quad S'(x_c-) \neq S'(x_c+)\,. \qquad (1.138)$$

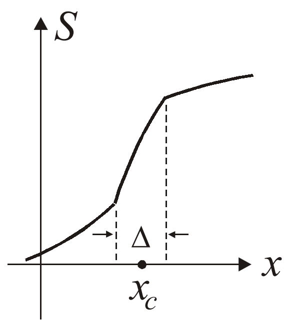

Рис.1-14.Скачок с изломом.

В нем первая производная содержит одно непрерывное слагаемое и два дискретных слагаемых, определяющих качественную и количественную дискретность:

$$S'(x) = S_c'(x) + \Delta S'(x_c) e(x - x_c) + \Delta S(x_c) \delta(x - x_c)\,. \tag{1.139}$$

Дифференцируя первую производную, находим вторую:

$$S''(x) = S_c''(x) + \Delta S'(x_c) \delta(x - x_c) + \Delta S(x_c) \delta'(x - x_c)\,. \tag{1.140}$$

и т.д.

Отметим также следующие типы дискретностей:
а) двойной скачок - импульс (рис.1-15a):

$$S(x_c-) = S(x_c+)\,, \quad S'(x_c-) = S'(x_c+) \quad \text{и} \quad S'(x_c) = 0\,, \qquad 1.141)$$

б) импульс с изломом (рис.1-15b):

$$S(x_c-) = S(x_c+)\,, \quad S'(x_c-) \neq S'(x_c+) \quad \text{и} \quad S'(x_c) = 0\,, \tag{1.142}$$

в) импульс со скачком (рис.1-15c):

$$S(x_c-) \neq S(x_c+)\,, \quad S'(x_c-) = S'(x_c+) \quad \text{и} \quad S'(x_c) = 0\,, \tag{1.143}$$

г) импульс с изломом и скачком (рис.1-15d):

$$S(x_c-) \neq S(x_c+)\,, \quad S'(x_c-) \neq S'(x_c+) \quad \text{и} \quad S'(x_c) = 0\,. \tag{1.144}$$

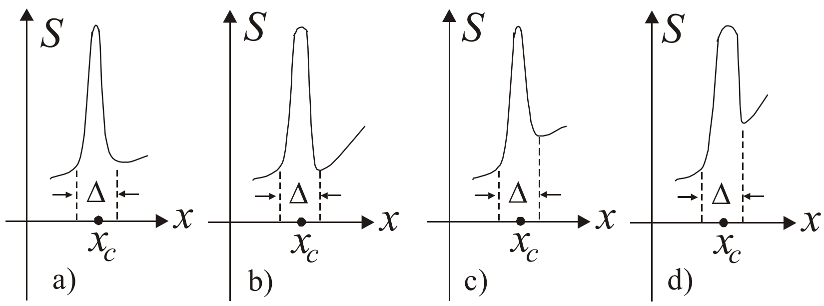

Рис.1-15. Дискретные переходы.

По мере того как растет поперечник материальной точки, прерывность ″растекается″, превращаясь в непрерывность.